11/12 Mathematik (4)

Im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufen 11 und 12 befassen sich die Schüler mit komplexeren mathematischen Denkweisen und Sachverhalten. Der Themenstrang Funktionen, der bereits in der Unterstufe angelegt und zunehmend ausgebaut wurde, bildet nun den Schwerpunkt. Dabei gewinnt der in Jahrgangsstufe 10 aus der Anschauung gewonnene Grenzwertbegriff beim Arbeiten mit Funktionstermen weiter an Substanz. Anhand von Funktionen, bei denen sich in der Regel die Frage nach der Stetigkeit nicht stellt, erarbeiten die Schüler nun Methoden der Differential- und Integralrechnung. Diese Verfahren eröffnen ihnen neue Möglichkeiten, Lösungen für komplexere Anwendungsaufgaben zu entwickeln. Vielschichtigere Situationen aus Natur, Technik und Wirtschaft werden von den jungen Erwachsenen analysiert und mit Mitteln der Differential- und Integralrechnung mathematisch beschrieben. Gleichzeitig wird das weit über die Mathematik hinaus bedeutsame Verständnis für funktionale Zusammenhänge sowie die Fähigkeit, diese zu erfassen, gefördert. Die Schüler lernen zudem, elektronische Hilfsmittel dem jeweiligen Problem angemessen zu verwenden, und nutzen diese z. B. zur Visualisierung von funktionalen Zusammenhängen.
In der Stochastik lernen die Schüler aufbauend auf ihren bisher erworbenen Kenntnissen einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff kennen und erfahren dabei exemplarisch, wie sich Begriffsbildungen in der Mathematik im Lauf der Zeit weiterentwickelt haben. Anhand binomialverteilter Zufallsgrößen setzen sich die Schüler mit Methoden der beurteilenden Statistik auseinander. Sie lernen, Ergebnisse statistischer Entscheidungsverfahren zu interpretieren und wesentliche, im Alltag vielfach als Schlagworte verwendete Begriffe richtig zu bewerten.
In der Geometrie verbessern die Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen bei der Darstellung von Punkten und Körpern im dreidimensionalen Koordinatensystem. Sie lernen dabei Vektoren als nützliches Hilfsmittel kennen, mit dem insbesondere metrische Probleme vorteilhaft gelöst werden können. Die Jugendlichen erfahren vor allem bei der Betrachtung geometrischer Körper sowie bei der analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen, wie ihr bisher erworbenes Wissen durch Verfahren der Vektorrechnung erweitert wird.
Für interessierte Jugendliche bietet sich die Möglichkeit, Mathematik auch als Seminar zu wählen.

Jahrgangsstufe 11

M 11.1 Änderungsverhalten von Funktionen

Die Schüler erkennen, dass für viele Fragestellungen Aussagen über den Verlauf eines Graphen und über das Änderungsverhalten einer Funktion von Interesse sind. Sie lernen, grundlegende Verfahren der Infinitesimalrechnung anzuwenden, die ihnen helfen, funktionale Zusammenhänge besser zu beschreiben.

M 11.1.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen (ca. 9 Std.)

Seit Jahrgangsstufe 8 kennen die Schüler Beispiele für gebrochen-rationale Funktionen. Sie vertiefen nun ihre Kenntnisse über diesen Funktionstyp und erweitern den aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff für $x \to \pm\infty$ auf den Fall $x \to x_0$. Den Grobverlauf eines Graphen erschließen sie sich durch Analyse des Funktionsterms. Dabei berücksichtigen die Schüler auch schräge Asymptoten, wenn deren Gleichung unmittelbar aus dem jeweiligen Funktionsterm ersichtlich ist.

- Polstellen, horizontale und vertikale Asymptoten von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

M 11.1.2 Lokales Differenzieren (ca. 9 Std.)

Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. Die Schüler lernen die Betragsfunktion als eine Funktion kennen, die an einer Stelle ihres Definitionsbereichs nicht differenzierbar ist, und interpretieren diese Eigenschaft auch graphisch.

- der Differenzenquotient und seine Deutung als Sekantensteigung bzw. mittlere Änderungsrate
- der Differentialquotient und seine Deutung als Tangentensteigung bzw. lokale Änderungsrate
- Begriff der Differenzierbarkeit, Abgrenzung insbesondere durch die Betragsfunktion

M 11.1.3 Globales Differenzieren (ca. 13 Std.)

Lokal ermittelte Werte für die Ableitung führen zum Begriff der Ableitungsfunktion. Die Schüler lernen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten zu differenzieren, und erarbeiten Regeln, die es ihnen erlauben, rationale Funktionen abzuleiten. Die Aufgabe, zu gegebener Ableitungsfunktion eine zugehörige Funktion zu finden, führt die Jugendlichen zum Begriff der Stammfunktion. Sie lernen auch, allein aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf der Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion und möglicher Stammfunktionen zu schließen.

- Ableitungsfunktion
- Ableitung ganzrationaler Funktionen, Summenregel, Produktregel
- Ableitung von gebrochen-rationalen Funktionen, Quotientenregel
- Begriff der Stammfunktion, Ermitteln von Stammfunktionstermen

M 11.1.4 Anwendungen der ersten Ableitung (ca. 11 Std.)

Die Schüler erkennen, dass mithilfe der Ableitungsfunktion präzisere Aussagen über den Verlauf von Funktionsgraphen und das Änderungsverhalten von Funktionen gemacht werden können. Mit dem Newton-Verfahren lernen sie, ein effizientes iteratives Verfahren anzuwenden, das mithilfe der Ableitung Näherungswerte für Nullstellen liefert, die sich mit den bisherigen Kenntnissen nicht berechnen lassen.

- Monotonie und lokale Extremwerte
- Untersuchung rationaler Funktionen
- Newton-Verfahren

M 11.2 Koordinatengeometrie im Raum (ca. 22 Std.)

Die Schüler festigen ihre geometrischen Kenntnisse in anspruchsvolleren räumlichen Betrachtungen. In geeignet gewählten dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystemen stellen sie Punkte sowie Körper dar und arbeiten mit Vektoren im Anschauungsraum – auch unter Verwendung der zugehörigen Koordinatenschreibweise. Beim Zeichnen geometrischer Körper im Schrägbild festigen die Jugendlichen ihr räumliches Vorstellungsvermögen und entwickeln ihre Vorstellung von Lagebeziehungen im Raum weiter.

Fragen der Längen- und Winkelmessung führen die Schüler zum Skalarprodukt von Vektoren und dessen Anwendungen; dabei lernen sie auch, Gleichungen von Kugeln in Koordinatenform zu formulieren. Die Jugendlichen erkennen, dass zur Bestimmung von orthogonalen Vektoren das Vektorprodukt vorteilhaft eingesetzt werden kann. Der praktische Nutzen von Skalar- und Vektorprodukt wird ihnen auch bei der Ermittlung von Flächeninhalten und Volumina geeigneter geometrischer Objekte deutlich. Bei der Beschreibung und Untersuchung geometrischer Figuren und Körper sind die Schüler nun in der Lage, sowohl auf die Vektorrechnung als auch auf grundlegende Verfahren aus der Mittelstufe zurückzugreifen.

- dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem, Darstellen von Punkten und einfachen Körpern
- Vektoren im Anschauungsraum, Rechnen mit Vektoren
- Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt
- Berechnungen an Körpern, u. a. Flächeninhalte und Volumina

M 11.3 Weitere Ableitungsregeln (ca. 14 Std.)

Die Jugendlichen treffen beispielsweise bei der Untersuchung naturwissenschaftlicher Fragestellungen erneut auf die Sinus- und Kosinusfunktion, deren Ableitungsfunktionen sie sich auf graphischem Weg plausibel machen.

Der Übergang von der lokalen Umkehroperation zur zugehörigen Umkehrfunktion führt die Schüler von der Quadratfunktion zur Wurzelfunktion, die häufig auch in Verkettung mit anderen Funktionen auftritt. Sie lernen, mit diesem Funktionstyp umzugehen sowie die Kettenregel anzuwenden. Anhand vielfältiger, auch anwendungsbezogener Aufgabenbeispiele gewinnen die Jugendlichen zunehmend Sicherheit beim Arbeiten mit den bisher bekannten Ableitungsregeln.

- Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion
- die Wurzelfunktion und ihre Ableitung, Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

- Verkettung von Funktionen, Kettenregel

M 11.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion (ca. 11 Std.)

Die Schüler erkennen, dass sie noch nicht alle ihnen bekannten Funktionen differenzieren können. Beispielsweise bei der Frage nach der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion lernen sie die Euler'sche Zahl e kennen. Hierbei bietet sich zur Abrundung der im Lauf der Gymnasialzeit aufgebauten Zahlvorstellung ein Rückblick auf die Zahlenbereichserweiterungen an.
Mithilfe anschaulicher Überlegungen erfassen die Jugendlichen den Zusammenhang zwischen den Graphen von natürlicher Exponential- und natürlicher Logarithmusfunktion. Durch Untersuchung einfacher Verknüpfungen der bisher bekannten Funktionen mit der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion vertiefen sie ihre Kenntnisse.

- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion und ihre Ableitungen

M 11.5 Wahrscheinlichkeitsbegriff (ca. 10 Std.)

Die Entwicklung eines abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriffs erlaubt es den Schülern, verschiedene bereits aus den vorhergehenden Jahrgangsstufen bekannte Begriffe und Vorgehensweisen zu präzisieren und zu erweitern. Sie erkennen, dass für weitergehende Betrachtungen von Zufallsexperimenten, die nicht der Laplace-Annahme genügen, ein tragfähiger, auf unterschiedliche Sachverhalte anwendbarer Wahrscheinlichkeitsbegriff nötig ist. Die Tatsache, dass auch bedeutende Mathematiker bis zu seiner axiomatischen Fundierung lange um eine einwandfreie Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gerungen haben, macht den Schülern deutlich, dass in der Mathematik ein ständiger Prozess der Entwicklung von Begriffen und Aussagen stattfindet.
Die Schüler arbeiten nun formaler mit Ereignissen und vertiefen dabei ihre bisherigen Kenntnisse. Sie erkennen, wie die Darstellung eines Ereignisses als Komplement-, Schnitt- oder Vereinigungsmenge es erleichtern kann, dessen Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Ausgehend vom bereits bekannten Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit lernen die Schüler, zwischen abhängigen und unabhängigen Ereignissen zu unterscheiden sowie Aussagen darüber zu machen, ob Ereignisse einander beeinflussen.

- axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit
- verknüpfte Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten

M 11.6 Anwendungen der Differentialrechnung (ca. 13 Std.)

Beispielsweise bei Fragen der Optimierung setzen die Schüler ihre neu erworbenen Kenntnisse über Funktionen und deren Ableitung ein. Die Interpretation der Ableitung als Änderungsverhalten der Funktion bzw. als Tangentensteigung des zugehörigen Graphen wird dabei den Jugendlichen erneut bewusst. Sie vertiefen die erlernten Techniken, indem sie diese auch auf einfache Funktionen mit Parametern anwenden und Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen. Die Schüler erkennen, dass insbesondere bei praktischen Anwendungen verschiedenster Funktionen die berechneten Ergebnisse stets interpretiert und auf ihre Sinnhaftigkeit überprüft werden müssen, etwa im Zusammenhang mit Randextrema oder Parametern.

- Extremwertprobleme
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen

Jahrgangsstufe 12

M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung

Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integration ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten. Sie erarbeiten die wesentlichen Begriffe und Konzepte und wenden diese zielgerichtet an. Dabei lernen sie auch, durch Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Funktionsgraphen deren Verlauf präziser zu beschreiben.

M 12.1.1 Flächeninhalt und bestimmtes Integral (ca. 14 Std.)

Die Schüler haben in Jahrgangsstufe 11 die Ableitung einer Funktion als Möglichkeit zur Erfassung der lokalen Änderungsrate kennengelernt; sie machen sich nun bewusst, dass sich die zugehörige Gesamtänderung als Flächeninhalt unter dem Graph, der die lokale Änderungsrate beschreibt, deuten lässt. Ihre Überlegungen führen die Jugendlichen auf das bestimmte Integral und dessen Interpretation als Flächenbilanz.
Die Schüler lernen, Integrale zu berechnen und in Sachzusammenhängen anzuwenden. Dazu begründen sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mithilfe anschaulicher Überlegungen und stellen die Verbindung mit der aus Jahrgangsstufe 11 bekannten Stammfunktion her. Sie erkennen, dass Differenzieren und Integrieren Umkehroperationen sind.

- bestimmtes Integral, Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Berechnung von Flächeninhalten

M 12.1.2 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen (ca. 7 Std.)

Die neuen Begriffe und Verfahren werden bei verschiedenen Fragestellungen angewandt, insbesondere bei solchen, die eine geometrische Deutung der Integralfunktion erfordern. Dabei greifen die Schüler auch die bereits bekannten Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion wieder auf.
Beispielsweise beim Erschließen des Verlaufs des Graphen einer Integralfunktion aus dem der Integrandenfunktion und aus deren Ableitung lernen die Schüler neben der Monotonie nun auch die Krümmung als Eigenschaft von Graphen kennen. Sie untersuchen das Krümmungsverhalten an Beispielen bisher bekannter Funktionstypen.

- Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion, Ableitungsfunktion und Integralfunktionen
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte

M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik (ca. 26 Std.)

Die Jugendlichen erkennen, dass im Alltag vielfach Zufallsexperimente von Bedeutung sind, für deren Versuchsausgang es lediglich zwei Alternativen gibt. Bei der Beschreibung solcher Zufallsexperimente lernen sie den Binomialkoeffizienten als sinnvolle Abkürzung kennen und werden mit der Binomialverteilung vertraut. Insbesondere an dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung gewinnen die Schüler auch Einsicht in die Bedeutung und Definition der Begriffe Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung. Ihnen wird bewusst, dass sich Bernoulli-Experimente mit dem Urnenmodell „Ziehen mit Zurücklegen“ veranschaulichen lassen; zudem arbeiten sie die Unterschiede zum Urnenmodell „Ziehen ohne Zurücklegen“ heraus. Die Visualisierung von Verteilungen, z. B. mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen, unterstützt die Bearbeitung verschiedenster Sachprobleme und die Beantwortung von Fragestellungen, die typische Überlegungen zu Fehlerwahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Tests vorbereiten.
Am Beispiel des einseitigen Signifikanztests erhalten die Schüler einen Einblick in die beurteilende Statistik. Sie lernen einzuschätzen, wie sich Änderungen von Stichprobenlänge, Ablehnungsbereich oder Signifikanzniveau auf die Aussage des Tests auswirken.

- Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette
- Binomialkoeffizient, Binomialverteilung
- Anwendung der Binomialverteilung insbesondere am Beispiel des einseitigen Signifikanztests

M 12.3 Geraden und Ebenen im Raum (ca. 22 Std.)

Aufbauend auf dem ihnen bereits bekannten Rechnen mit Vektoren lernen die Schüler zur analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen im Raum Gleichungen in Parameterform kennen und deuten die lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit von Vektoren anschaulich. Sie arbeiten mit der Ebenengleichung in Normalenform, die sich bei Abstandsberechnungen und Lagebetrachtungen als vorteilhaft erweist. Bei Schnittproblemen vertiefen sie ihr Wissen über lineare Gleichungssysteme aus der Mittelstufe. Die Schüler veranschaulichen in Schrägbildern die Lage von Geraden und Ebenen und untersuchen Eigenschaften von Körpern. Dabei wird ihnen erneut bewusst, dass manche Aufgabenstellungen sowohl mit Methoden der analytischen Geometrie als auch mit den aus der Mittelstufe bekannten Verfahren gelöst werden können.

- Beschreibung von Geraden und Ebenen durch Gleichungen
- Lagebeziehungen: gegenseitige Lage von Geraden, von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen zueinander
- Abstands- und Winkelbestimmungen, insbesondere unter Verwendung der Hesse'schen Normalenform

- Anwendungen in Sachzusammenhängen

M 12.4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung (ca. 15 Std.)

Bei praxisnahen Fragestellungen, z. B. aus den Natur- oder Sozialwissenschaften, setzen die Schüler ihre Kenntnisse mathematischer Methoden vorteilhaft ein. Insbesondere Anwendungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion verdeutlichen erneut deren Bedeutung für die Beschreibung von Vorgängen in der Natur und der Technik. Die Jugendlichen führen Flächenberechnungen durch und bearbeiten wiederum Extremwertaufgaben, wobei auch Bezüge zur Geometrie aufgezeigt werden. Bei der Untersuchung von Verknüpfungen bekannter Funktionen wird der Blick dafür geschärft, möglichst geschickt wesentliche Eigenschaften von Funktionsgraphen zu erkennen.

- Anwendungen, insbesondere bei Wachstums- und Zerfallsprozessen und bei Fragen der Optimierung (z. B. Einbeschreibungs- oder Abstandsprobleme)
- Untersuchungen an verknüpften Funktionen