Mathematik: Grundwissen 9. Jahrgangsstufe

1. Rechnen mit Wurzeln

1.1. Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthält alle rationalen Zahlen (= positive, negative Bruchzahlen und die Null = $\mathbb{Q}$) und alle irrationalen Zahlen
(= Zahlen, mit einem unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbruch), z. B. $\sqrt{2}$ oder π

1.2. $\sqrt{a}$ ist eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt, also: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.
Beispiel: $\sqrt{9} = 3$, da $\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 9$
a <u>darf niemals</u> negativ sein und $\sqrt{a}$ <u>ist niemals</u> negativ (ist also 0 oder positiv!)
a heißt „Radikand“.

1.3. $\sqrt{x^2} \neq x$, sondern: $\sqrt{x^2} = |x|$

Beispiele: i) $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ ii) $x^2 = 2 \overset{\text{auf beiden Seiten}}{\underset{\text{"wurzeln"}}{\Longrightarrow}} \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow |x| = \sqrt{2}$, also $x = \pm\sqrt{2}$

1.4. Wurzelrechenregeln:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$,

aber: $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a^2 \pm b^2} \neq a \pm b$
„aus Differenzen und aus Summen ‚wurzeln‘ nur die …“

Ist der Radikand a keine Quadratzahl, kann man manchmal auch teilweise Wurzelziehen
(= „Radizieren“), z. B. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

1.5. Die n-te Wurzel ($\triangleq$ Potenzen mit rationalem Exponenten):
Die n-te Wurzel aus a: $\sqrt[n]{a}$ ist die Zahl, deren n-te Potenz a ergibt, also: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$,

Beispiel: $\sqrt[3]{8} = 2$, da 2·2·2 = 8.
Auch hier gilt: a <u>darf niemals</u> negativ sein!

Wurzelschreibweise / Potenzschreibweise
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, …, allgemein: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\left(\sqrt[4]{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{4}}$, allgemein: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

1.6. Lösen von Potenzgleichungen: $x^n = a$

	n ist gerade	n ist ungerade (es gibt IMMER eine Lösung)
$a > 0$	zwei Lösungen: $\sqrt[n]{a}$ bzw. $-\sqrt[n]{a}$	eine Lösung: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	eine Lösung: 0	eine Lösung: 0
$a < 0$	keine Lösung	eine Lösung: $-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

1.7. Rechenregeln für Potenzgesetze: gelten auch für rationale und reelle Exponenten!

1.8. Binomische Formeln:
Plusformel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1. Binomische Formel)
Minusformel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2. Binomische Formel)
Plus-Minus-Formel: $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$ (3. Binomische Formel)

2. *Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$*
(falls a = 0, liegt eine lineare Funktion vor)

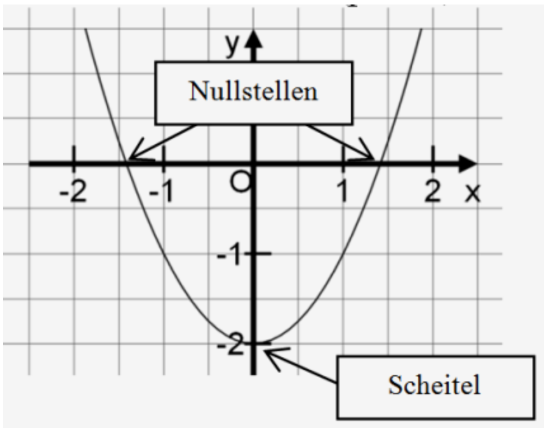
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

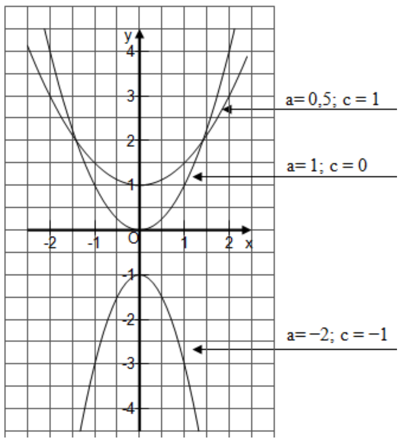
2.1. Bedeutung der Koeffizienten:
Koeffizient „a“ ist für die Öffnung und die Form der Parabel zuständig:

	$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$0 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Öffnung	unten	unten	unten	oben	oben	oben
Form	gestreckt	Normalparabel	gestaucht	gestaucht	Normalparabel	gestreckt

Koeffizient „c“: Die Parabel schneidet die y-Achse im Punkt (0 | c).

2.2. Fachbegriffe:





2.3. Darstellungsformen von quadratischen Funktionen

	Normalform	Scheitelform	Faktorisierte Form (Nullstellenform)
allgemein:	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Beispiel:	$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$	$f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 4{,}5$	$f(x) = 0{,}5(x + 1)(x - 5)$
was kann man ablesen?	- Öffnung: oben - Stauchung - y-Achsenabschnitt: $y = -2{,}5 \rightarrow (0 \mid -2{,}5)$	Scheitelpunkt: S (2 | −4,5)	Nullstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 5$ $\rightarrow (-1 \mid 0); (5 \mid 0)$

Umformungen:
geg.: Normalform → ges.: Scheitelform: „quadratische Ergänzung"

$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$	| ausklammern
$= 0{,}5(x^2 - 4x - 5)$	| von „b" die Hälfte nehmen, dann quadrieren
$= 0{,}5(x^2 - 4x \mathbf{+ 4 - 4} - 5)$	| das Ergebnis einmal „+" und einmal „–"
$= 0{,}5[(x-2)^2 - 9]$	| aus den ersten drei Termen bin. Form bilden
$= 0{,}5(x-2)^2 - 4{,}5$	| Vorfaktor mit „eckiger Klammer" multiplizieren

geg.: Normalform → ges.: Nullstellenform: „Lösungsformel, also Mitternachtsformel"

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$ $\qquad x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-2{,}5)}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{2 \pm \sqrt{9}}{1} = 2 \pm 3$

also: $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$ → $f(x) = 0{,}5 \cdot (x+1) \cdot (x-5)$ [Faktorisierte Form]

Bedeutung des „Terms unter der Wurzel": Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Diskriminante	Anzahl der Nullstellen von $f(x) = ax^2 + bx + c$	Verlauf der Parabel	Anzahl der Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$
$D > 0$	2 Nullstellen	Parabel schneidet x-Achse zweimal	2 Lösungen
$D = 0$	1 Nullstelle	Parabel berührt x-Achse	1 Lösung
$D < 0$	keine Nullstelle	Parabel hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse	keine Lösung

geg.: Scheitelform/Nullstellenform → ges.: Normalform: durch „Ausmultiplizieren"

3. *Quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$*

($\hat{=}$ Bestimmen der Nullstellen einer quadratischen Funktion)

3.1. Falls b = 0: „reinquadratische Gleichung" → „x auf eine Seite, dann ‚wurzeln' "
$5x^2 - 15 = 0 \rightarrow 5x^2 = 15 \rightarrow x^2 = 3$ → $x = \sqrt{3}$ <u>oder</u> $x = -\sqrt{3}$

3.2. Falls c = 0: „x ausklammern":
$2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x\,(2x - 3) = 0$ → $x = 0$ oder $x = 1{,}5$

3.3. sonst: LÖSUNGSFORMEL: Anzahl der Lösungen ist abh. von der Diskriminante (s. oben!)

4. *Zusammengesetzte Zufallsexperimente: (Baumdiagramm)*

<u>1. Pfadregel:</u> Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

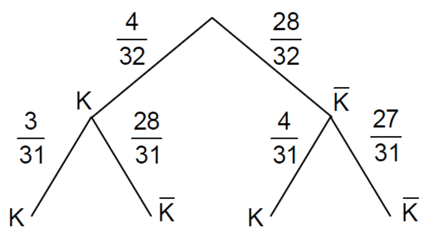
<u>2. Pfadregel:</u> Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

<u>3. Pfadregel:</u> Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Knotenpunkt weitergehen, ist stets 1.

<u>Beispiel:</u>

1. Pfadregel: $P(KK) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$

2. Pfadregel: $P(K\overline{K}$ oder $\overline{K}K) = \frac{4}{32} \cdot \frac{28}{31} + \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{7}{31}$



5. *Satzgruppe des Pythagoras:*

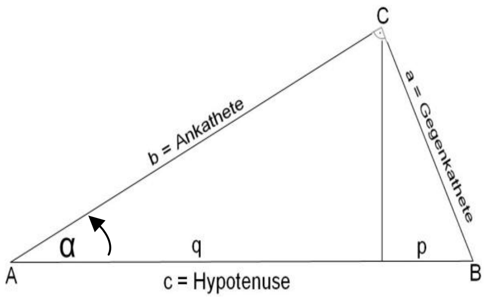
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC (γ = 90°) gilt:

5.1. Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
5.2. Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
5.3. Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c$ bzw. $b^2 = q \cdot c$

6. *Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck*

$$\text{Sinus}(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \text{Kosinus}(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \text{Tangens}(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

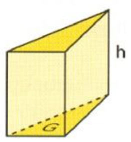
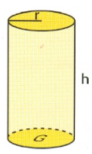
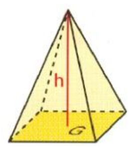
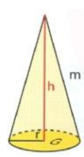


$\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$

Trigonometrischer Pythagoras: $[\sin(\alpha)]^2 + [\cos(\alpha)]^2 = 1$

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin (α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Eselsbrücke	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos (α)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan (α)	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	---

7. ***Raumgeometrie:*** Abkürzungen: G = Grundfläche, M = Mantelfläche, h = Höhe, m = Mantellinie

	Prisma	Zylinder	Pyramide	Kegel
Volumen V	$G \cdot h$	$G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$	$\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	$\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$
Oberfläche S		$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$		$r^2\pi + r \cdot \pi \cdot m$ mit $m = \sqrt{r^2 + h^2}$
Schrägbild				
Netz