Mathematik: Grundwissen 5. Jahrgangsstufe

1. Natürliche Zahlen

Große Zahlen, Zehnerpotenzen

Für große Zahlen verwendet folgende Zahlworte und oft die Schreibweise mit Zehnerpotenzen:

Zahl	Zahlwort	Anzahl der Nullen	Zehnerpotenz
1000	Tausend	3	10^3
1 000 000	Million	6	10^6
1 000 000 000	Milliarde	9	10^9
1 000 000 000 000	Billion	12	10^{12}

Primzahlen: Eine natürliche Zahl ≥ 2, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt Primzahl.
Die ersten Primzahlen lauten: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, . . .
Jede Zahl lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen (**Primfaktorzerlegung**).

<u>Beispiele</u>: $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad$ $56 = 2 \cdot 28 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$

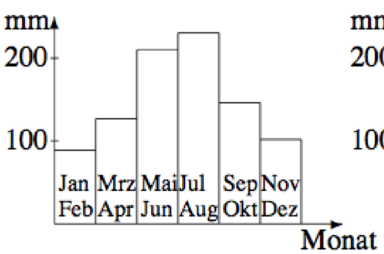
Runden: Beim Runden von Zahlen gilt: Ist die vorderste der „weggelassenen" Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, dann wird abgerundet, sonst wird aufgerundet.
<u>Beispiel</u>: 74 528 auf Zehntausender gerundet ist 70 000, auf Tausender gerundet ist es 75 000.

Diagramme: Zur Veranschaulichung von Daten verwendet man Diagramme.
<u>Beispiele</u>: Darstellungen für die Regenmenge in Millimetern, gemessen während eines Jahres in München

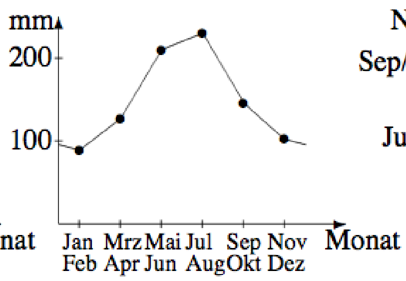
Tabelle:

Jan/Feb	89
Mrz/Apr	127
Mai/Jun	210
Jul/Aug	230
Sep/Okt	146
Nov/Dez	102

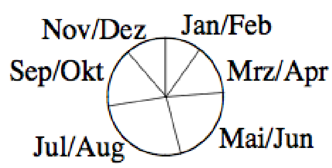
Säulendiagramm:



Liniendiagramm:



Kreisdiagramm:



2. Rechnen mit natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen besteht aus den positiven ganzen Zahlen: $\mathbb{N}$ = {1; 2; 3; ...}.
Wenn die Null mit eingeschlossen sein soll, schreibt man die Menge $\mathbb{N}_0$ = {0; 1; 2; 3; ...}.

Multiplikation

<u>Beispiel</u>: <u>572 · 386</u>

```
  1716
   4576
    3432
________
  220792
```

Potenzen

<u>Beispiel</u>: $7^3 = \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3\ \text{Faktoren}} = 343$

Division

Beginne bei der zu teilenden Zahl (=Dividend) "von vorne".
Bei größeren Zahlen ist oft eine Überschlagsrechnung sinnvoll.

<u>Beispiel</u>: 1984 : 32. Hier beginnt man mit 198:32 und kann sich z.B. als Überschlagsrechnung 198:30 ≈ 6 im Kopf überlegen.
Dann heißt der erste Schritt also 6 · 32 = 192 und die Rechnung lautet:

```
 1984 : 32 = 62
−192
   64
  −64
    0
```

Beachte: **Durch Null darf man nicht dividieren!**
Nicht verwechseln: Erlaubt ist es, Null **durch** eine Zahl (ungleich Null) zu dividieren, z. B. $0:5=0$.

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck. Für Terme verwendet man folgende **Fachbegriffe**:

Termname	***Summe***	***Differenz***	***Produkt***	***Quotient***	***Potenz***
Rechnung	$a + b$	$a - b$	$a \cdot b$	$a : b$	a^b
Tätigkeitswort	*addieren*	*subtrahieren*	*multiplizieren*	*dividieren*	*potenzieren*
a heißt ...	*1. Summand*	*Minuend*	*1. Faktor*	*Dividend*	*Basis*
b heißt ...	*2. Summand*	*Subtrahend*	*2. Faktor*	*Divisor*	*Exponent*

Rechenreihenfolge „**KlaPoPuStri**“: „Klammern vor Potenzen vor Punkt vor Strich
Bei reinen Punkt- oder Strichrechnungen wird der Reihe nach gerechnet.
Was man noch nicht rechnen kann, schreibt man unverändert ab.

Beispiele: $7 \cdot 2^3 = 7 \cdot 8 = 56$ (Potenzen vor Punkt)
$(100 - 5 + 2 \cdot 6^2 : 12) \cdot 9 + 1 = (100 - 5 + 2 \cdot 36 : 12) \cdot 9 + 1 = (100 - 5 + 72 : 12) \cdot 9 + 1 =$
$= (100 - 5 + 6) \cdot 9 + 1 = (95 + 6) \cdot 9 + 1 = 101 \cdot 9 + 1 = 909 + 1 = 910$

Beim **Gliedern von Termen** verwendet man die obigen Fachbegriffe und die vorgeschriebene Rechenreihenfolge. Die Rechenart, die zuletzt ausgeführt wird, bestimmt die Art des Gesamtterms.
Der Term $(100 - 5 + 2 \cdot 6^2 : 12) \cdot 9 + 1$ aus dem vorigen Beispiel ist also eine Summe.

Rechengesetze

Kommutativgesetz:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetz:	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$(a + b) : c = a : c + b : c$

3. Die ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$ besteht aus den positiven und den negativen Zahlen und der Null.
Auf der **Zahlengeraden** liegen die **negativen Zahlen links von der Null**.
Jede ganze Zahl hat eine **Gegenzahl** mit gleichem **Betrag** (Abstand zur Null), z.B. $|4| = |-4| = 4$.
Größenvergleich: a ist kleiner als b, wenn a auf der Zahlengeraden links von b liegt, z. B. $-50 < -2$.

Addition und Subtraktion

Regeln zur Addition:

Bei **gleichen Vorzeichen** addiert man die Beträge und gibt der Summe das gemeinsame Vorzeichen.
Beispiel: $-5 + (-9) = -(5+9) = -14$

Bei **verschiedenen Vorzeichen** subtrahiert man den kleineren Betrag **vom** größeren Betrag und gibt der Differenz das Vorzeichen des Summanden, der den größeren Betrag hat.
Beispiel: $-5 + 9 = +(9-5) = 4$

Regel zur Subtraktion: Die Subtraktion einer Zahl bedeutet dasselbe wie die Addition ihrer Gegenzahl.
Beispiel: $-5 - (-9) = -5 + (+9) = 4$ $\quad -5 -(+9) = -5 + (-9) = -14$ (siehe Regeln der Addition)

Mehrgliedrige Summen und Differenzen: Fasse zuerst die Plus- und Minusglieder zusammen!

Beispiel: $-17 - 51 +13 - 1 + 47 = +13 + 47 -17 -51 - 1 = (13 + 47) - (17 + 51 + 1) = 60 -69 = -9$

Multiplikation und Division

Vorzeichenregeln:			
	$+ \cdot + = +$	$+ : + = +$	("Plus mal Plus ergibt Plus"; alle Regeln genauso für "geteilt")
	$+ \cdot - = -$	$+ : - = -$	("Plus mal Minus ergibt Minus")
	$- \cdot + = -$	$- : + = -$	("Minus mal Plus ergibt Minus")
	$- \cdot - = +$	$- : - = +$	("Minus mal Minus ergibt Plus")

Beispiele: $(-3) \cdot (-7) = 21$; $\quad (-7) \cdot (-2) \cdot (-1) = (+14) \cdot (-1) = -14$; $\quad 119 : (-7) = -17$
$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (+9) \cdot (+9) = 81$

Beachte dabei: $(-2)^2 = 4$, **aber** $-2^2 = -4$ [die Potenz kommt vor dem Minus dran, denn $-2^2 = (-1) \cdot 2^2$]

4. *Geometrische Grundbegriffe*

Punkt: A, B, … **Strecke:** s = [AB] 

Streckenlänge: $\overline{AB}$, z. B. $\overline{AB} = 4\ \text{cm}$; **Gerade:** g = AB

Senkrechte Geraden: $g \perp h$, g heißt **Lot** von h, der **Schnittwinkel beträgt 90° (rechter Winkel)**

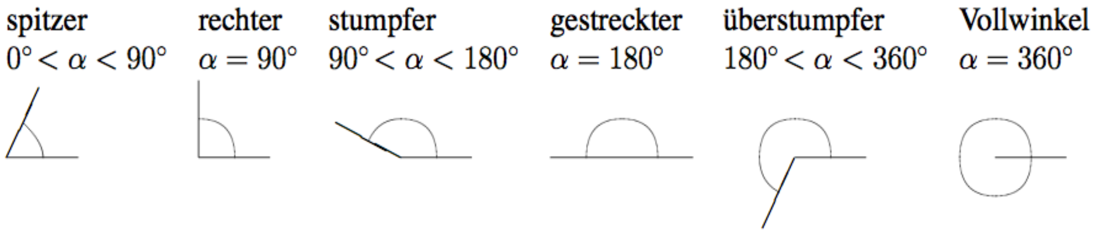
Parallele Geraden: g || h, sie haben keinen Schnittpunkt, einen festen Abstand und ein gemeinsames Lot

Besondere Vierecke:	Parallelogramm:	Gegenüberliegende Seiten sind parallel
	Raute:	Parallelogramm mit lauter gleich langen Seiten
	Rechteck:	Parallelogramm mit vier rechten Winkeln
	Quadrat:	Rechteck mit lauter gleich langen Seiten

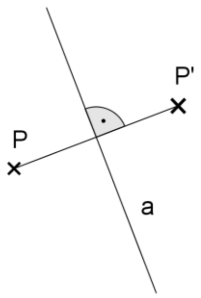
Ein **Kreis** wird durch Angabe seines Mittelpunktes und seines Radius eindeutig festgelegt.
Alle Punkte eines Kreises haben von seinem Mittelpunkt den gleichen Abstand.

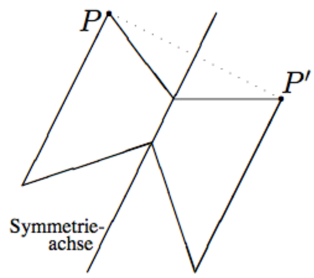
Ein **Winkel** wird gebildet von zwei Halbgeraden, den **Schenkeln**, die am **Scheitel** zusammentreffen.
Als **Bezeichnungen** benutzt man griechische Buchstaben, z.B. α ("alpha"), β ("beta"), γ ("gamma"), ...
Zum **Messen** von Winkeln benutzt man das Geodreieck. Die Größe wird in **Grad** angegeben.

Bezeichnungen für Winkelarten:



Achsensymmetrie:
P und *P'* liegen symmetrisch bezüglich der **Symmetrieachse** *a*, wenn die Strecke *[PP']* von *a* senkrecht geschnitten und halbiert wird.
Achsensymmetrische Figuren lassen sich so falten, dass die beiden Hälften genau aufeinander passen.



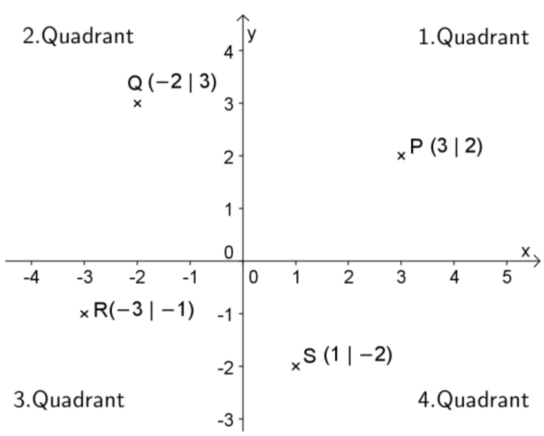


Geometrische Körper werden durch **Flächen** begrenzt und haben **Kanten** und **Ecken**.
<u>Beispiele</u>: **Würfel, Quader, Prisma, ...**
Wird die Oberfläche eines Körpers aufgeschnitten und aufgeklappt, so erhält man das **Netz** des Körpers.

Im **Koordinatensystem** kann die Lage von Punkten in der Ebene veranschaulicht werden.
Es besitzt zwei **Achsen**, die x-Achse und die y-Achse.
Ihr Schnittpunkt heißt **Ursprung**.

Das Koordinatensystem ist in 4 Quadranten eingeteilt.

Jeder Punkt besitzt zwei **Koordinaten**,
die x- und die y-Koordinate, z. B. P(3 | 2).



5. Größen

Jede Größe besteht aus einer **Maßzahl** und einer **Maßeinheit**, z. B. 5 cm.

Längeneinheiten:	1 cm = 10 mm,	1 dm = 10 cm,	1 m = 10 dm,	1 km = 1000 m
Masseneinheiten:	1 g = 1000 mg,	1 kg = 1000 g,	1 t = 1000 kg	
Zeiteinheiten:	1 min = 60 s,	1 h = 60 min,	1 d = 24 h	
Geldeinheiten:	1 € = 100 ct			

Beim **Addieren und Subtrahieren von Größen** müssen alle Größen in der **gleichen Maßeinheit** vorliegen.

Beim **Dividieren zweier Größen** der gleichen Einheit bleibt eine reine Zahl übrig, z.B. 10 cm : 2 cm = 5

Maßstab
Durch einen Maßstab kann eine **Vergrößerung oder Verkleinerung** angegeben werden (z.B. in einer Karte).
Der Maßstab **1 : 1000** bedeutet, dass 1 cm in der Karte 1000 cm = 10 m in Wirklichkeit entspricht.

6. Flächen und Flächenmessung

Der **Flächeninhalt** einer Figur gibt an, wie groß ihre Fläche ist. Man verwendet als **Einheit** den Flächeninhalt eines **Einheitsquadrats**, z. B. 1 cm².
Beispiel: 5 cm² bedeutet: Die Fläche ist fünfmal so groß wie die Fläche eines Einheitsquadrats der Seitenlänge 1 cm.

Umrechnungen der Flächeneinheiten: Der **Umrechnungsfaktor** ist **100**.
1 cm² = 100 mm²
1 dm² = 100 cm²
1 m² = 100 dm²
1 a (lies: "1 Ar") = 100 m²
1 ha (lies: "1 Hektar") = 100 a
1 km² = 100 ha

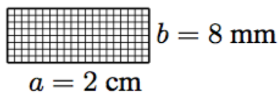
Flächeninhalt A und Umfang u von Rechteck und Quadrat:

Rechteck mit den Seitenlängen a und b:	A = a · b	u = 2 · a + 2 · b = 2 · (a + b)
Quadrat mit der Seitenlänge a:	A= a · a = a^2	u = 4 · a

Oberflächeninhalt O von Quader und Würfel:

Quader mit den Kantenlängen a, b und c:	O = 2 · a· b + 2 · a · c + 2 · b · c
Würfel mit der Kantenlänge a:	O = 6 · a · a = 6 · a^2

Rechnen mit Längen und Flächen:
Vor dem Rechnen müssen die Größen in die gleichen Einheiten umgewandelt werden.



Beispiel: Rechteck mit *a* = 2 cm, *b* = 8 mm:
A = 2 cm · 8 mm = 20 mm · 8 mm = 160 mm²
u = 2 · (2 cm + 8 cm) = 2 · (20 mm + 8 mm) = 2 · 28 mm = 56 mm