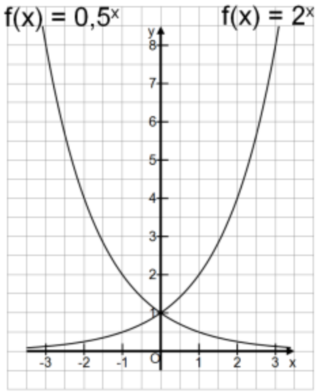
Mathematik: Grundwissen 10. Jahrgangsstufe

© St. Marien-Gymnasium, 2013



1. *Exponentialfunktion* *$f(x) = a^x$, $(a > 0;\ a \neq 1)$*

1.1. Graph von f:
a > 1: exponentielle Zunahme
a < 1: exponentielle Abnahme

1.2. Transformationen: $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d$
„b" steht für: Streckung mit |b| in y-Richtung
„c" steht für: Verschiebung in x-Richtung
„d" steht für: Verschiebung in y-Richtung

2. *Logarithmus*

Der Logarithmus von u zur Basis a ist die Zahl r, mit der man a potenzieren muss, um u zu erhalten, also:
$a^r = u \Leftrightarrow r = \log_a u$
z. B.: $\log_2 8 = 3$, da $2^3 = 8$

Logarithmus ist ein anderes Wort für „Exponent zu einer bestimmten Basis".

Besonderer Logarithmus: $\log_{10} u$ („Zehnerlogarithmus": Abkürzung: lg u)

Regeln:

a) $\log_a u$:	a und u dürfen nur positiv sein!	
b) $\log_a 1 = 0$,	da $a^0 = 1$ für alle positiven a.	
c) $\log_a a = 1$,	da $a^1 = a$ für alle positiven a.	
d) Produktregel:	$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$	| eventl. bei u bzw. v Betrag bilden!
e) Quotientenregel:	$\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v$	| eventl. bei u bzw. v Betrag bilden!
f) Potenzregel:	$\log_a u^r = r \cdot \log_a u$	

3. *Exponentialgleichungen* kann man oft mit „Logarithmieren" lösen,

z. B. $2^x = 3 \rightarrow \lg 2^x = \lg 3 \rightarrow x \cdot \lg 2 = \lg 3 \rightarrow x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}585$

Anwendungen:

3.1. <u>Verdoppelungszeit:</u> Ein Geldbetrag K_0 wird jährlich zu 4 % verzinst.
Nach wie vielen Jahren t hat sich der Geldbetrag verdoppelt?

$K(t) = K_0 \cdot 1{,}04^t$; wähle t so, dass $K(t) = 2 \cdot K_0$; also $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}04^t \Leftrightarrow 2 = 1{,}04^t$

Logarithmieren: $\lg 2 = \lg 1{,}04^t \Leftrightarrow \lg 2 = t \cdot \lg 1{,}04 \Leftrightarrow t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}04} \approx 17{,}7$ [Jahre]

3.2. <u>Halbwertszeit:</u> Pro Tag zerfallen 8,3 % vom Jod-131-Atomkernen.
Nach wie vielen Tagen t hat sich der Anfangsbestand N_0 halbiert?

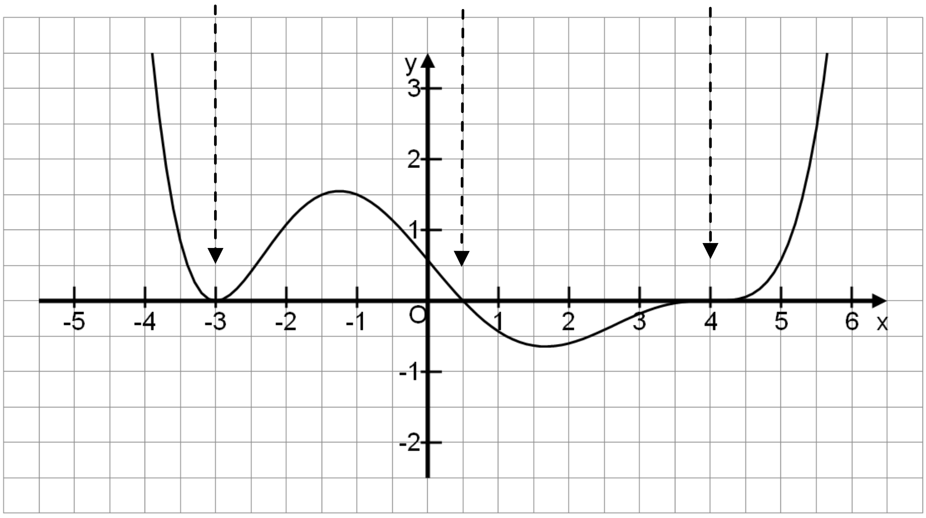
$N(t) = N_0 \cdot 0{,}917^t$; wähle t so, dass $N(t) = 0{,}5 \cdot N_0$; also $0{,}5 \cdot N_0 = N_0 \cdot 0{,}917^t \Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}917^t$

Logarithmieren: $\lg 0{,}5 = \lg 0{,}917^t \Leftrightarrow \lg 0{,}5 = t \cdot \lg 0{,}917 \Leftrightarrow t = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}917} \approx 8{,}0$ [Tage]

4. ***Untersuchung von Funktionen***

4.1. Nullstellen (= Schnittpunkte des Graphen im der x-Achse)

$f(x) = \quad 0{,}002 \quad \cdot$	$(x + 3)^2 \quad \cdot$	$(x - 0{,}5)^1 \quad \cdot$	$(x - 4)^3$
Vielfachheit der Nullstelle	doppelt bei $x = -3$	einfach bei $x = 0{,}5$	dreifach bei $x = 4$
Graph von f	berührt x-Achse	schneidet x-Achse	durchdringt x-Achse



4.2. Exkurs: Lösungsverfahren von biquadratischen Gleichungen: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c = 0$

Beispiel:

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ | Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 7u + 12 = 0$ | Anwenden der Lösungsformel (Variable u)

$$u_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2}$$

$u = 4 \lor u = 3$ | Resubstitution

$x^2 = 4 \lor x^2 = 3$ | Lösen der reinquadratischen Gleichung (Variable x)

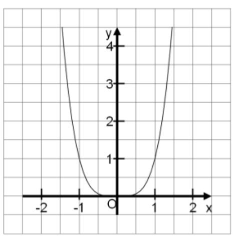
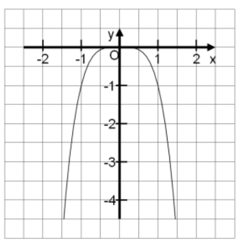
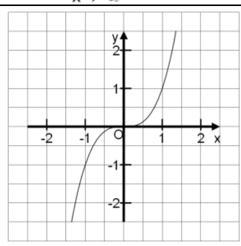
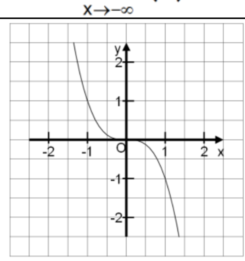
$x = 2 \lor x = -2 \lor x = \sqrt{3} \lor x = -\sqrt{3}$ [vier Nullstellen der Funktion f(x)]

4.3. Verhalten im Unendlichen

f konvergiert	f divergiert bestimmt	f divergiert unbestimmt
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ *existiert nicht*
Graph schmiegt sich an waagrechte Asymptote an	Graph „schießt" nach oben oder nach unten	Graph „schwankt" hin und her (z. B. sin(x))

4.4. Verhalten von Polynomfunktionen im Unendlichen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Typ I	Typ II	Typ III	Typ IV
a_n pos. / n gerade	a_n neg. / n gerade	a_n pos. / n ungerade	a_n neg. / n ungerade
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$
			

4.5. Symmetrie zum Koordinatensystem:
Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$,
- bei Polynomfunktionen: wenn alle Exponenten gerade sind.
Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$,
- bei Polynomfunktionen: wenn alle Exponenten ungerade sind

4.6. Transformationen von Funktionen

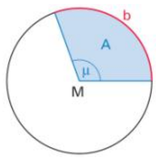
Ausgangsfunktion f(x)	
$f(x) + d$	Verschiebung des Graphen: falls $d > 0$: nach oben falls $d < 0$: nach unten
$f(x - c)$	Verschiebung des Graphen: falls $c < 0$: nach links falls $c > 0$: nach rechts
$a \cdot f(x)$	Strecken/Stauchen in y-Richtung mit dem Faktor a falls $\lvert a\rvert > 1$: Strecken falls $0 < \lvert a\rvert < 1$: Stauchen falls $a = -1$, also $-f(x)$: Spiegelung an der x-Achse
$f(b \cdot x)$	Strecken bzw. Stauchen des Graphen von f in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ falls $\lvert b\rvert > 1$: Stauchung falls $0 < \lvert b\rvert < 1$: Streckung falls $b = -1$, also $f(-x)$: Spiegelung an der y-Achse

5. *Der Kreis:*

Umfang des Kreises: $u_{Kreis} = 2 \cdot r \cdot \pi$
Flächeninhalt des Kreises: $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi$
Kreissektor:

- Bogenlänge des Sektors: $b = \frac{\mu}{360°} \cdot 2\pi \cdot r$

- Flächeninhalt des Sektors: $A_{Sektor} = \frac{\mu}{360°} \cdot \pi \cdot r^2$, wobei μ der Mittelpunktswinkel ist.



6. *Die Kugel:*

Oberfläche der Kugel: $O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

Volumen der Kugel: $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

7. *Trigonometrie:*

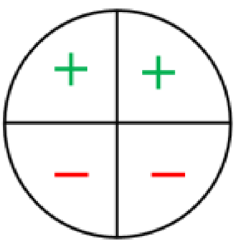
Umrechnung: Gradmaß (φ) – Bogenmaß (x): $x = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$

Umrechnungstabelle:

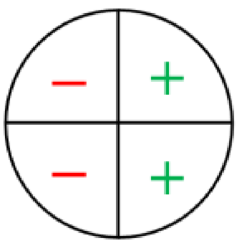
Gradmaß φ	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Vorzeichentabellen:

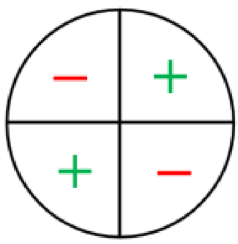
Sinus



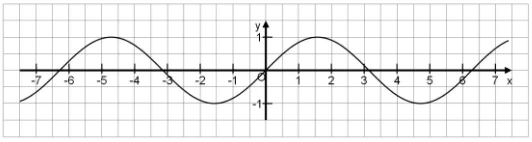
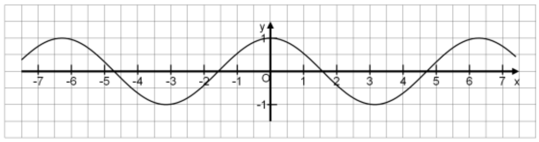
Kosinus



Tangens



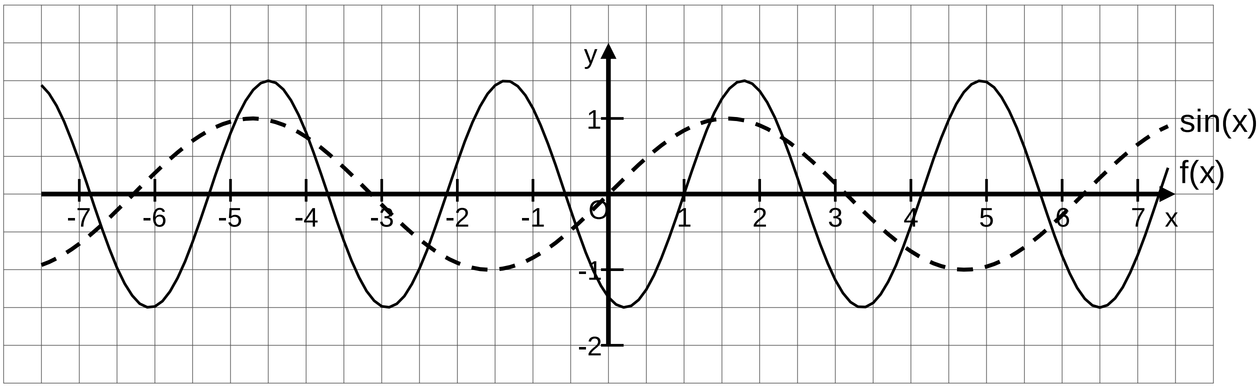
8. *Winkelfunktionen*

<table>
<tr><th>f(x) = sin(x)</th><th>f(x) = cos (x)</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>- Definitionsmenge: $\mathbb{R}$
- Wertemenge: [−1; 1]
- Periode: 2π,
also $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung;
also: $\sin(-x) = -\sin(x)$
- Nullstellen: $k \cdot \pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$</td><td>- Definitionsmenge: $\mathbb{R}$
- Wertemenge: [−1; 1]
- Periode: 2π,
also $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- achsensymmetrisch zur y-Achse;
also: $\cos(-x) = \cos(x)$
- Nullstellen: $(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, mit $k \in \mathbb{Z}$</td></tr>
</table>

Transformationen der Sinuskurve: $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c)] + d$

Parameter	Erläuterungen
„a“ steht für „Amplitude“	= „Ausschlag“ nach oben bzw. unten falls a < 0: Spiegelung an der x-Achse
„b“ steht für Periode	Die Länge der Periode ist: $\frac{2\pi}{b}$, d. h. zwischen 0 und 2π hat die Funktion b Schwingungen
„c“ steht für die Verschiebung in x-Richtung	Kurve „startet“ bei der Nullstelle x = c (falls d = 0)
„d“ steht für die Verschiebung in y-Richtung	y = d ist die „Mittellinie“ der Sinuskurve

Beispiel: $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin[2 \cdot (x - 1)] + 0$



9. *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Zusammenhang zwischen	
Vierfeldertafel	Baumdiagramm

	A	$\bar{A}$	Summe
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Summe	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1